

Zadaniologia

czyli

teoria i praktyka rozwiązywania
zadań matematycznych

obejmująca program całego liceum

*** **Wspornik Licealisty** ***

2017

© ISBN 978-83-85077-09-1 ©

Autor Łukasz Sławiński

matma@czytaj.net

Spis rozdziałów

(zawierają łącznie 800 małych stron)

3 X 2017

0000-Zadaniologia	250-nierówności	701-planimetria-1
004-DYREKTYWY	300-funkcje	702-planimetria-2-r
050-rachunki	350-ciągi	703-planimetria-3-r
080-procenty	400-analityczna	750-stereometria-0
085-składane	430-wektory	751-stereometria-1
090-arbuz	450-sytuacje-0	752-stereometria-2-r
120-wielomiany	451-sytuacje-1-r	753-stereometria-3-r
130-bezwzględna	500-trygonometria	760-granice-r
140-podzielność	550-statystyka	770-pochodne-r
150-logarytmy	600-szansologia-0	780-calki-rr
200-równania-0	601-szansologia-1-r	ŚCIAĞAWKA
201-równania-1-r	700-planimetria-0	PAMIĘTAWKA

Wszystkie teksty są plikami typu PDF – do czytania programem AdobeReader.

Najlepiej czytać je w trybie: „jedna strona na cały ekran”

Nastawić dogadzającą wielkość tekstu w procentach.

Dalej reszta uwag wprowadzających

Nazwy plików mają na początku numery trzycyfrowe.

Służą to wskazaniu zalecanej kolejności ich studiowania – w tej właśnie kolejności będą się wyświetlać w katalogu na komputerze.

**Pliki z zadaniami z Matury Rozszerzonej mają na końcu dodatkową literę „r”
Strony są małe – takie aby na ekranie pojawiała się tylko jedna w całości.**

**Ma to na celu umożliwienie studiowania metodą „krok po kroku” –
widzimy problem, próbujemy rozwiązać go samodzielnie... i dalej (PgDn)**

Zadania w pliku są na ogół uszeregowane od najłatwiejszych do trudnych.

**Jeśli ktoś nie zamierza zdawać Matury Rozszerzonej, może przerwać po
natrafieniu na zadania trudne (mają nad ramką po prawej błądą literę „r”)**

Wśród plików jest urzędowa Ściągawka Maturalna (plik: SCIAGAWKA)

**Wolno korzystać z niej na maturze, więc należy ją wydrukować, spiąć zszywką i
jak najczęściej używać. Po co? Aby się do niej przyzwyczaić i nie marnować
czasu na przypominanie sobie wzorów. Wprawdzie niektórzy nauczyciele wy-
magają „wykucia” wzorów na pamięć, ale nie należy traktować tego poważnie
(bo skoro na maturze wolno...).**

NB wzorów i twierdzeń jest w ogóle zatrzęsienie – nawet wytrawny matematyk mało ich pamięta, ale po zajrzeniu do literatury jakoś sobie poradzi.

Jak szukać w Ściągawce?

Głupkowaty bałaganiarz robi to na oślep: otwiera ją gdziekolwiek, rozpaczliwie przekręca kartki (czasem do tyłu!), niezbyt wie czego szuka (bo nie ustalił sobie tego zawczasu), a jeśli w końcu znajdzie odpowiedni fragment, to przegląda go losowo („A nuż wpadnie mi pod oczy”).

Człowiek inteligentny robi to metodycznie i dokładnie: najpierw zagląda do Spisu, a potem dokładnie przeszukuje tekst wypatrując upatrzonych zawczasu słów kluczowych (jak Ctrl F przy przeglądaniu pliku).

Podobnie w matematyce – kiedy jest kilka możliwości, nie należy rozpaczliwie chwytać się pierwszej lepszej w nadziei że to będzie ta – lecz starannie przejrzeć wszystkie – w określonym porządku, aby żadnej nie przegapić.

Pamiętawka (plik: PAMIETAWKA)

Niestety, w Ściągowce brakuje wielu pożytecznych informacji i faktów – wprawdzie były podawane na wykładach, ale przecież łatwo się zapomina. Dlatego często w rozwiązaniach dokładnie je przypominamy. I dlatego ulokowaliśmy je w osobnym pliku.

Jak to jest z rozwiązywaniem zadań?

Czy potrzebny jest jakiś genialny przebłysk lub nadzwyczajny pomysł?
A może trzeba wcześniej rozwiązać 100 zadań podobnych?

O pierwsze niełatwo – a w ogóle to nieprawda. Zadania – nawet te z matury rozszerzonej – wcale nie są tak trudne. Fakt że niektóre są bardziej żmudne (wymagają więcej czasu i pisania) – ale ich poszczególne etapy są całkiem łatwe. Jest po prostu tak jakby były 3-4 zadania w jednym.

Drugie z kolei nosi znamiona bezmyślnego wkuwania na pamięć. Wprawdzie od wielu wielu lat edukatorzy apelują, aby nie uczyć pamięciowo lecz rozumowo, ale to tylko frazes – w praktyce mnóstwo z nich pamięciówkę wręcz uwielbia.

Dowodem na to jest ambicja przejawiana przez wielu autorów podręczników i niektórych nauczycieli – dać jak najwięcej żmudnych i nudnych zadań „na jedno kopyto” – jeśli da się uczniom dużą porcję i duży wycisk, to zapamiętają jak się większość zadań rozwiązuje i potem na maturze sobie poradzą.

Zadaniologia jest w trakcie rozwoju – będzie się rozszerzać i udoskonalać. Autor będzie wdzięczny za wszelkie uwagi – starannie je przestudiuje i wykorzysta. Pomijając błędy oczywiste (zawsze gdzieś coś tam się zakradnie), ważne są wszelkie momenty kiedy tok rozumowania jest niewyraźny, kiedy coś można było ująć lepiej bądź prościej itp.

Teksty Zadaniologii zastrzeżone są klauzulą Copyright

***Reszty niniejszego pliku można nie czytać.
Są w niej bowiem tylko pewne ciekawostki związane z twórczością matematyczną Autora, lecz nie dotyczą one niniejszej „Zadaniologii”***

Justycjalizacja (2003)

Pojedynki z których składa się turniej wieloosobowy rozgrywany systemem „każdy z każdym” wyceniane są niezależnie od pozostałych – co już samo w sobie budzi poważne wątpliwości, bo rezultaty poszczególnych pojedynków nie są ze sobą powiązane. Są jeszcze i inne mankamenty – zwłaszcza to że zwycięstwo nad słabym przeciwnikiem ma tę samą wartość co zwycięstwo nad silnym. W efekcie gracz, który z czołówką osiągnie wyniki mierne, może nadrobić to z nawiązką dzięki wysokiemu ograniu przeciwników słabszych – i zarobić na nich tyle, że w sumarycznym wyniku zdobędzie miejsce wcale wysokie (a może nawet i pierwsze). Ten mankament jest dostrzegany i często próbuje się go zmniejszyć zapraszając do turnieju graczy o zbliżonym poziomie.

Spróbujmy to naprawić przez tzw justycjalizację – który to termin ma w zamierzeniu oznaczać „dosprawiedliwianie”, czyli czynienie wyników bardziej sprawiedliwymi.

Spójrzmy na poniższy turniej „każdy z każdym”:

Każdy pojedynek punktowany jest przez podzielenie między graczy 10 punktów, które dla ładności nazwane są tu viktorkami (od rzymskiej boginii zwycięstwa).

	A	B	C	D	Σ	
A		4	10	10	24	Pierwsze miejsce gracza A nie wydaje się zasłużone, ponieważ:
B	6		9	8	23	- zdobył je głównie dzięki maksymalnym wygrany z outsiderami C D
C	0	1		9	10	- nad graczem B ma przewagę bardzo skromną
D	0	2	1		3	i z nim przegrał

Po zakończeniu turnieju (niestety, dopiero po) okazuje się, że niektóre pojedynki były bardziej ważne, a inne mniej. Np pojedynek między C a D był mało ważny, bo obaj okazali się bardzo słabi, pojedynek A przeciwko B był ważniejszy niż przeciwko C, itp.

Jak wyceniać „ważność” pojedynku?

Sensowną miarą wydaje się być **iloczyn sił obu graczy** (analog Prawa Po-
wszechnej Atrakcji), a siła gracza to oczywiście jego sumaryczny wynik w tur-
nieju. Przemnożmy więc wynik każdego pojedynku przez siły obu graczy, czyli
przez **ważność pojedynku**:

	A	B	C	D	Σ	
A		$4 \cdot 23 \cdot 24$	$10 \cdot 10 \cdot 24$	$10 \cdot 3 \cdot 24$	5328	Zgodnie z intuicyjnym ocze- kivaniem gracz B wyszedł na prowadzenie. Viktorki zdobyte przez A oka- zały się mniej wartościowe niż viktorki zdobyte przez B.
B	$6 \cdot 24 \cdot 23$		$9 \cdot 10 \cdot 23$	$8 \cdot 3 \cdot 23$	5934	
C	$0 \cdot 24 \cdot 10$	$1 \cdot 23 \cdot 10$		$9 \cdot 3 \cdot 10$	500	
D	$0 \cdot 24 \cdot 3$	$2 \cdot 23 \cdot 3$	$1 \cdot 10 \cdot 3$		168	

Dla lepszej percepcji przeskalujemy liczby do bardziej familiarnych rozmiarów –
przemnożmy je przez taki współczynnik, by suma wyników wynosiła – jak po-
przednio – 60 viktorek. Otrzymamy:

	A	B	C	D	Σ
A		11	12	4	27
B	17		10	3	30
C	0	1		1	2
D	0	1	0		1

Jak widać, suma viktorek rozdzielonych między obu graczy nie jest już stale równa 10, lecz zależy od ważności pojedynku !
 Np za A z B rozdzielamy aż 28, podczas gdy za C z D tylko 1.
 Proporcje rozdzielanych viktorek nie uległy oczywiście zmianie.
 Np 11:17 w A z B to identyczna proporcja co wcześniejsze 4:6.

Tak skorygowane wyniki turnieju wydają się być bardziej sprawiedliwe niż wyniki pierwotne!

Stopniowanie justycjalizacji

Czy siła graczy była uwzględniona w dostatecznym stopniu?
 a może w zbyt dużym?

Wprowadźmy parametr J określający stopień justycjalizacji – wynik pojedynku mnożmy przez jego **ważność podniesioną do potęgi J** . Im większe J , tym bardziej wzrośnie przewaga pojedynków ważniejszych nad mniej ważnymi (dla $J = 0$ nie będzie justycjalizacji, dla $J = 1$ będzie to co robiliśmy dotychczas):

J = 0.2

	A	B	C	D	Σ
A		5	11	9	25
B	8		10	7	25
C	0	1		7	8
D	0	2	1		3

J = 0.7

	A	B	C	D	Σ
A		9	12	5	27
B	13		11	4	28
C	0	1		3	4
D	0	1	0		1

J = 1

	A	B	C	D	Σ
A		11	12	4	27
B	17		10	3	30
C	0	1		1	2
D	0	1	0		1

J = 2

	A	B	C	D	Σ
A		17	8	1	26
B	26		7	1	34
C	0	1		0	1
D	0	0	0		0

Kwestie:

- 1) Czy można dla takiej justycjalizacji znaleźć jakieś uzasadnienie nieintuicyjne ?
- 2) Czy istnieje jakaś optymalna wartość dla J, czy też należy ją obierać „na wycucie” ?
- 3) Być może pula nagród powinna być rozdzielana wg wyników justycjalizacji (dla J = ?)

Źródło: Pikier.com

Justycjalizacja nie jest twierdzeniem, lecz postulatem (podobnie jak Zasada Najmniejszych Kwadratów) i być może dlatego została już zignorowana przez 2 czasopisma matematyczne. A szkoda – bo chyba nigdy dotąd nie próbowano poprawić zakorzenionej metody punktowania przez zwykłe dodawania.

Zasada Indukcji Początkowej (2008)

Niech $T(n)$ oznacza tezę o liczbie n .
Dla każdej T istnieje takie k że:
JEŚLI dla każdego $i < k$ jest $T(i)$
TO dla każdego n jest $T(n)$

Wszystkie liczby użyte
obok z lewej są naturalne

To twierdzenie ma charakter dydaktyczny – uzasadnia bowiem intuicyjne przypuszczenie, że jeśli coś zachodzi dla dostatecznie wielu kolejnych liczb naturalnych, to zachodzi także dla wszystkich. Dowód jest łatwy – może służyć jako ćwiczenie z logiki – niestety nie daje żadnych możliwości wyznaczenia owego „dostatecznie wiele” – twierdzenie jest zatem tylko pouczającą ciekawostką.

Rafał Marks zauważył (11 XII 17) że że poprzednik implikacji można zastąpić po prostu przez $T(k)$. Teraz staje się to jeszcze bardziej szokujące, bo wystarczy dowieść tezy dla jednej wartości !! byleby – bagatelka, LOL, wiedzieć ile ona wynosi. Tak to jest z dowodami niekonstruktywnymi – i dlatego przez niektórych matematyków (intuicjonistów) są odrzucane.

Hipoteza Maxymalnego Splotu (1972)

JEŚLI:

jest ileś tam funkcji przekształcających pierścienie reszt modulo R na siebie, i zarówno one jak ich różnice są różnowartościowe

TO:

jest ich najwyżej tyle ile wynosi najmniejszy dzielnik właściwy liczby R zmniejszony o 1

Jak dokonałem wynalazku

Felieton opublikowany około 1999

W 1972 roku pracowałem w Ośrodku Obliczeniowym przy Ministerstwie Handlu Wewnętrznego, w Dziale Programowania. Ośrodek ten (zwyczajem PRL-owski) nic sensownego nie robił, prócz tego że zapewniał miłą i lekką pracę (rzecz jasna kiepsko płatną) inteligentnej młodzieży (w Dziale Programowania) i inteligentnym średniowiekowcom (w Dziale Projektowania). Był więc podczas pracy czas i na zabawę i na zajęcia własne. Byle wysiedzieć te 8 godzin.

Zetknąłem się wówczas po raz pierwszy z tzw Kodem Kontrolnym. Rzecz polega na tym, że wypisując jakąś nazwę możemy omyłkowo wpisać inną – bardzo podobną i też istniejącą. Np jeśli są nazwy Alfa153 i Alfa163, to zmiana 5 na 6 jest bardzo łatwa do przeoczenia. Nazwy powinny być więc zróżnicowane, a najłatwiej to osiągnąć rozszerzając je o dodatkowo cyfrę (Kod Kontrolny), wyliczaną z odpowiednio przyjętej formuły matematycznej.

W 1972 na komputer chodziło się raz na tydzień (z pudłem kart perforowanych), a ręczne obliczanie Cyfry Kontrolnej zabierało kilka nudnych i żmudnych minut. Wykombinowałem więc suwak składający się z kilku kartoników (położonych kolejno jeden na drugim), co skróciło obliczanie do kilku sekund i wyeliminowało konieczność sprawdzania.

Kiedy sława suwaka dotarła do Działu Projektowania, zjawiłem się tam z modelem w ręku, aby zostawić do skopiowania i swobodnego użytku. Ku mojemu zdumieniu Kierownik Działu nie chciał suwaka nawet wziąć do ręki, by – jak stwierdził – nie ukraść mi mimowolnie pomysłu. Okazało się, że mam suwak opatentować, że dostanę za to pieniądze, że mam obliczyć ile zyska gospodarka narodowa,... itd itp.

Zaraziłem się tym zapalem i...

Rzecznik Patentowy Ministerstwa dał mi do zrozumienia, że ma mnie gdzieś (razem z suwakiem), i żebym nie przeszkadzał mu w pracy. W Biurze Patentowym PRL popatrzone na mnie jak na złodzieja (!?). Zrezygnowałem.

Po kilku miesiącach odszedłem z Ośrodka, a w miesiąc później usłyszałem, że powołano tam Zespół do Oceny Wynalazków Pracowniczych. Czy cokolwiek oceniono? – nie wiem do dzisiaj [*pisane w 1994*]. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, abyś Ty Czytelniku się dowiedział. Ośrodek bowiem zdaje się nadal istnieje pod nazwą:

CENTRUM KOMPUTERYZACJI RYNKU

P.S.

Hipotezę Maxymalnego Splotu wysunąłem właśnie w związku z suwakiem. Nie potrafiłem jej rozstrzygnąć. Poszedłem z nią do Katedry Teorii Liczb (gdzie też nie potrafiono). Możliwe więc, że jakaś postać „Hipotezy Sławińskiego” do dziś figuruje gdzieś tam w literaturze matematycznej.

I na zakończenie anegdota związana z Hipotezą:

Męczyłem nią oczywiście wszystkich znajomych mających coś wspólnego z matematyką. Jeden z nich spotkał ongiś w pociągu nocnym z Paryża Anglika jadącego do Warszawy na Kongres Matematyków, akurat specjalistę od Teorii Liczb. Oczywiście przedstawił mu hipotezę, a Anglik z pobłażliwym uśmiechem stwierdził, że może (mój znajomy) spokojnie zasnąć, bo wkrótce zostanie to rozstrzygnięte. Ale nad ranem Anglik nadal siedział z piórem w ręku, a zamiast pobłażliwego uśmiechu na jego twarzy widniał zdumiony respekt. I nic dziwnego: bo przypadkowy młody (wówczas) człowiek, w niedbałym stroju podróżnym wprawia jego (specjalistę od Teorii Liczb!) w zakłopotanie.

Mediana do (drobnej) korekty (2017)

Wiadomo że funkcja $S(x) = |x - x_1|^p + |x - x_2|^p + \dots + |x - x_n|^p$

dla $p = 2$ osiąga minimum dla średniej arytmetycznej, a dla $p = 1$ dla mediany. Dla $p = 1$ zdarzają się jednak sytuacje kłopotliwe – mianowicie minimum może być przyjmowane na całym przedziale. Np dla zestawu 1 2 5 8 minimum = 10 jest przyjmowane na całym przedziale [2,5].

Ten kłopot rozwiązuje się pragmatycznie, biorąc za medianę środek przedziału. Nasuwa się pytanie, czy jest to jakoś uzasadnione?

Zbadałem empirycznie (analitycznie chyba niesposób) jak zmienia się minimum gdy p dąży do $1+$? Okazało się że minimum nie dąży do środka przedziału!

Np dla zestawu 1 2 5 8 – jeśli $p \rightarrow 1+$ minimum dąży do 3,8

Zatem ta granica powinna być przyjmowana za medianę, lecz niestety – obliczenie jej jest b.żmudne, więc zwyciężyła wygoda.

Aksjomat Wzrastania Prawdopodobieństwa (2017)

Jeśli coś się zdarzyło – to prawdopodobieństwo tego musiało dojść do 1, a prawdopodobieństwo czegoś alternatywnego musiało zmaleć do 0.

Wniosek:

Jeśli ze zbioru zdarzeń wcześniej jednakowo prawdopodobnych jakieś się przytrafiło, to musiało ono stać się najbardziej prawdopodobne.

Ilustracja:

Jeśli rzucamy np dwiema monetami, to przed rzutem prawdopodobieństwo dwóch orłów wynosi 25% – ale jeśli już wypadły dwa orły, to prawdopodobieństwo musiało wzrosnąć do 1. Nie ma znaczenia że tego nie widzimy, bowiem moglibyśmy zobaczyć po sfilmowaniu i obejrzeniu w zwolnionym tempie.

Wniosek metafizyczny:

Bóg to istota dla której prawdopodobieństwa są 0 lub 1.

Jego logika jest więc klasyczna – zero-jedynkowa.

Człowiek jako istota niedoskonała musiał z rozpaczy wprowadzić prawdopodobieństwo oraz logikę trójwartościową i inne.

Poglądowy dowód Hipotezy Legendre'a (2017)

Hipoteza Legendre'a (1805):

Jeśli wykonano szereg pomiarów pewnej wielkości, to najbardziej prawdopodobną jej wartością jest taka której suma kwadratów odchyleń jest najmniejsza.

Pomiary: x_1, x_2, \dots, x_n

Suma: $S(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$

Skąd łatwo wyliczyć że ową wartością jest zwykła średnia arytmetyczna (zapewne znana i stosowana od zarania dziejów).

W Wikipedii czytamy:

Hipoteza Legendre'a nie wynika z żadnej ścisłej matematycznej teorii. Jakkolwiek poczyniono wiele prób, by udowodnić jej słuszność i uzasadnić stosowanie, wszystko spęzło na niczym.

I faktycznie – nie udaje się znaleźć w necie żadnego dowodu.

Ścisłego dowodu przeprowadzić nie potrafię – ale udało mi się trafić na obiecującą ścieżkę...

Przytrafiło się nam zdarzenie będące iloczynem zdarzeń niezależnych

X_1, X_2, \dots, X_n , więc jego szansa = iloczynowi szans tych zdarzeń.

Skoro się przytrafiło, to – patrz Aksjomat Wzrastania Prawdopodobieństwa – jego prawdopodobieństwo musiało stać się największe z prawdopodobieństw zdarzeń tej samej kategorii, czy z zestawów n pomiarów.

Aby coś z tego wywnioskować, musimy to prawdopodobieństwo obliczyć.

Założmy że próbka podlega królującemu rozkładowi normalnemu.

Jest to rozsądne ułatwienie – ale wyliczenie będzie niemal niemożliwe, bo mamy nie przedziały, lecz liczby. Dokonajmy więc uproszczenia:

Zastąpmy rozkład normalny jego przybliżeniem w postaci rozkładu dwumianowego, czyli przyjmijmy że prawdopodobieństwa zdarzeń $0, 1, \dots, k$

są proporcjonalne do współczynników w rozwinięciu potęgi $(a + b)^k$.

Otrzymamy ciąg liczb będący podstawą Trójkąta Pascala (porównaj także z Deską Galtona) przy czym najbardziej prawdopodobne będzie zdarzenie środkowe o wartości równej połowie k .

Wartość najbardziej prawdopodobna to ta dla której rozkład osiąga maksymalne prawdopodobieństwo.

Faktem jest że dla danej próbki takim rozkładem jest ten w którym średnia rozkładu = średnia próbki, ale nie wynika stąd że próbka pochodzi właśnie z tego rozkładu!

Dopiero zaakceptowanie Aksjomatu uprawnia do takiego wniosku.

A brzmi on w lapidarnym skrócie tak:

**„To co się zdarzyło miało w ostatniej chwili największą szansę zaistnienia”
i na jego słuszność wskazuje fizyka.**

A w ogóle to Autor zajmuje się bardziej teorią brydża niż matematyką, o czym można się przekonać pod www.Pikier.com (nb tam też jest trochę matematyki).