Zadaniologia

czyli

teoria i praktyka rozwiązywania
zadań matematycznych
obejmująca program całego liceum

∗∗∗ Wspornik Licealisty ∗∗∗

2017

© ISBN 978-83-85077-09-1 ©

Autor Łukasz Sławiński
matma@czytaj.net

Spis rozdziałów (zawierają łącznie 850 małych stron) 3 X 2017

0000-Zadaniologia	250-nierówności	701-planimetria-1
004-DYREKTYWY	300-funkcje	702-planimetria-2-r
050-rachunki	350-ciągi	703-planimetria-3-r
080-procenty	400-analityczna	750-stereometria-0
085-składane	430-wektory	751-stereometria-1
090-arbuz	450-sytuacje-0	752-stereometria-2-r
120-wielomiany	451-sytuacje-1-r	753-stereometria-3-r
130-bezwzględna	500-trygonometria	760-granice-r
140-podzielność	550-statystyka	770-pochodne-r
150-logarytmy	600-szansologia-0	780-calki-rr
200-równania-0	601-szansologia-1-r	ŚCIĄGAWKA
201-równania-1-r	700-planimetria-0	PAMIĘTAWKA

Wszystkie teksty są plikami typu PDF – do czytania programem AdobeReader.

Najlepiej czytać je w trybie: „jedna strona na cały ekran”

Nastawić dogadzającą wielkość tekstu w procentach.

Dalej reszta uwag wprowadzających

Nazwy plików mają na początku numery trzycyfrowe.

Służy to wskazaniu zalecanej kolejności ich studiowania – w tej właśnie kolejności będą się wyświetlać w katalogu na komputerze.

Pliki z zadaniami z Matury Rozszerzonej mają na końcu dodatkową literę „r”

Strony są małe – takie aby na ekranie pojawiała się tylko jedna w całości.

Ma to na celu umożliwienie studiowania metodą „krok po kroku” – widzimy problem, próbujemy rozwiązać go samodzielnie... i dalej (PgDn)

Zadania w pliku są na ogół uszeregowane od najłatwiejszych do trudnych.

Jeśli ktoś nie zamierza zdawać Matury Rozszerzonej, może przerwać po natrafieniu na zadania trudne (mają nad ramką po prawej bladą literę „r”)

Wśród plików jest urzędowa Ściągawka Maturalna (plik: SCIAGAWKA)
Wolno korzystać z niej na maturze, więc należy ją wydrukować, spiąć zszywką i jak najczęściej używać. Po co? Aby się do niej przyzwyczaić i nie marnować czasu na przypominanie sobie wzorów. Wprawdzie niektórzy nauczyciele wymagają „wykucia” wzorów na pamięć, ale nie należy traktować tego poważnie (bo skoro na maturze wolno...).

NB wzorów i twierdzeń jest w ogóle zatrzęsienie – nawet wytrawny matematyk mało ich pamięta, ale po zajrzeniu do literatury jakoś sobie poradzi.

Jak szukać w Ściągawce?
Głupkowaty bałaganiarz robi to na oślep: otwiera ją gdziekolwiek, rozpaczliwie przekręca kartki (czasem do tyłu!), niezbyt wie czego szuka (bo nie ustalił sobie tego zawczasu), a jeśli w końcu znajdzie odpowiedni fragment, to przegląda go losowo („A nuż wpadnie mi pod oczy").
Człowiek inteligentny robi to metodycznie i dokładnie: najpierw zagląda do Spisu, a potem dokładnie przeszukuje tekst wypatrując upatrzonych zawczasu słów kluczowych (jak Ctrl F przy przeglądaniu pliku).
Podobnie w matematyce – kiedy jest kilka możliwości, nie należy rozpaczliwie chwytać się pierwszej lepszej w nadziei że to będzie ta – lecz starannie przejrzeć wszystkie – w określonym porządku, aby żadnej nie przegapić.

Pamiętawka (plik: PAMIETAWKA)
Niestety, w Ściągawce brakuje wielu pożytecznych informacji i faktów – wprawdzie były podawane na wykładach, ale przecież łatwo się zapomina. Dlatego często w rozwiązaniach dokładnie je przypominamy. I dlatego ulokowaliśmy je w osobnym pliku.

Jak to jest z rozwiązywaniem zadań?
Czy potrzebny jest jakiś genialny przebłysk lub nadzwyczajny pomysł? A może trzeba wcześniej rozwiązać 100 zadań podobnych?

O pierwsze niełatwo – a w ogóle to nieprawda. Zadania – nawet te z matury rozszerzonej – wcale nie są tak trudne. Fakt że niektóre są bardziej żmudne (wymagają więcej czasu i pisania) – ale ich poszczególne etapy są całkiem łatwe. Jest po prostu tak jakby były 3-4 zadania w jednym.

Drugie z kolei nosi znamiona bezmyślnego wkuwania na pamięć. Wprawdzie od wielu wielu lat edukatorzy apelują, aby nie uczyć pamięciowo lecz rozumowo, ale to tylko frazes – w praktyce mnóstwo z nich pamięciówkę wręcz uwielbia.

Dowodem na to jest ambicja przejawiana przez wielu autorów podręczników i niektórych nauczycieli – dać jak najwięcej żmudnych i nudnych zadań „na jedno kopyto” – jeśli da się uczniom dużą porcję i duży wycisk, to zapamiętają jak się większość zadań rozwiązuje i potem na maturze sobie poradzą.

Zadaniologia jest w trakcie rozwoju – będzie się rozszerzać i udoskonalać.
Autor będzie wdzięczny za wszelkie uwagi – starannie je przestudiuje i wykorzysta. Pomijając błędy oczywiste (zawsze gdzieś coś tam się zakradnie), ważne są wszelkie momenty kiedy tok rozumowania jest niewyraźny, kiedy coś można było ująć lepiej bądź prościej itp.

Reszty niniejszego pliku można nie czytać.
Są w niej bowiem tylko pewne ciekawostki związane z twórczością matematyczną Autora, lecz nie dotyczą one niniejszej „Zadaniologii”

Justycjalizacja (2003)

Pojedynki z których składa się turniej wieloosobowy rozgrywany systemem „każdy z każdym" wyceniane są niezależnie od pozostałych – co już samo w sobie budzi poważne wątpliwości, bo rezultaty poszczególnych pojedynków nie są ze sobą powiązane. Są jeszcze i inne mankamenty – zwłaszcza to że zwycię- stwo nad słabym przeciwnikiem ma tę samą wartość co zwycięstwo nad silnym. W efekcie gracz, który z czołówką osiągnie wyniki mierne, może nadrobić to z nawiązką dzięki wysokiemu ograniu przeciwników słabszych – i zarobić na nich tyle, że w sumarycznym wyniku zdobędzie miejsce wcale wysokie (a może na- wet i pierwsze). Ten mankament jest dostrzegany i często próbuje się go zmniejszyć zapraszając do turnieju graczy o zbliżonym poziomie.

Spróbujmy to naprawić inaczej – przez tzw justycjalizację – który to termin ma w zamierzeniu oznaczać „dosprawiedliwianie", czyli czynienie wyników bardziej sprawiedliwymi.

Spójrzmy na poniższy turniej „każdy z każdym”:

Każdy pojedynek punktowany jest przez podzielenie między graczy 10 punktów, które dla ładności nazwane są tu viktorkami (od rzymskiej bogini zwycięstwa).

	A	B	C	D	Σ
A		4	10	10	24
B	6		9	8	23
C	0	1		9	10
D	0	2	1		3

Pierwsze miejsce gracza A nie wydaje się zasłużone, ponieważ:

– zdobył je głównie dzięki wygranym z outsiderami C D

– nad B ma przewagę bardzo skromną i z nim przegrał

Po zakończeniu turnieju (niestety, dopiero po) okazuje się, że niektóre pojedynki były bardziej ważne, a inne mniej. Np pojedynek między C a D był mało ważny, bo obaj okazali się bardzo słabi, pojedynek A przeciwko B był ważniejszy niż przeciwko C, itp.

Jak wyceniać „ważność” pojedynku?

Sensowną miarą wydaje się być suma sił obu graczy (siła gracza to oczywiście jego sumaryczny wynik w turnieju) podniesiona do kwadratu. Przemnóżmy więc wynik każdego pojedynku przez jego ważność:

	A	B	C	D	Σ
A		$4 \cdot (23+24)^2$	$10 \cdot (10+24)^2$	$10 \cdot (3+24)^2$	27 686
B	$6 \cdot (24+23)^2$		$9 \cdot (10+23)^2$	$8 \cdot (3+23)^2$	28 463
C	$0 \cdot (24+10)^2$	$1 \cdot (23+10)^2$		$9 \cdot (3+10)^2$	2 610
D	$0 \cdot (24+3)^2$	$2 \cdot (23+3)^2$	$1 \cdot (10+3)^2$		1 521

Zgodnie z intuicyjnym oczekiwaniem B wyszedł na prowadzenie. Viktorki zdobyte przez A okazały się mniej wartościowe niż zdobyte przez B.

Dla lepszej percepcji przeskalujmy liczby do bardziej familiarnych rozmiarów – przemnóżmy je przez taki współczynnik, by suma wyników wynosiła – jak poprzednio – 60 viktorek. Otrzymamy:

	A	B	C	D	Σ
A		8.79	11.51	7.26	27.56
B	13.19		9.76	5.38	28.33
C	0	1.08		1.51	2.60
D	0	1.35	0.17		1.51

Tak skorygowane wyniki turnieju – zjustycjalizowane – wydają się być bardziej sprawiedliwe niż wyniki pierwotne. Co potwierdzają także przykłady inne.

Jak widać, suma viktorek rozdzielonych między obu graczy nie jest już stale równa 10, lecz zależy od ważności pojedynku! (np za pojedynek A z B rozdzielamy aż 21.98, podczas gdy za C z D tylko 1.68) przy czym proporcje rozdzielanych viktorek nie uległy zmianie.

Stopniowanie justycjalizacji:
Zastosowane tutaj podniesienie iloczynu do kwadratu pełni rolę regulatora. Ogólnie można by podnosić do potęgi P – im większe P, tym bardziej uwypukla się przewaga pojedynków ważniejszych nad mniej ważnymi. Próby wykazuję że dopiero P = 2 daje uwypuklenie zauważalne. Być może lepsze byłoby większe.

Historia Justycjalizacji:
Problem justycjalizacji wysunął Autor już w 2001, lecz dopiero po dwóch latach wpadł na miernik sensowny, którym wówczas okazał się iloczyn sił obu graczy (analog Prawa Powszechnego Ciążenia). Próby zainteresowania kogokolwiek justycjalizacją (w nadziei że znajdzie się jakieś ściślejsze uzasadnienie matematyczne bądź choćby poszlaka) spaliły na panewce – okazało się że coś co nie jest wyłożone kawę na ławę jako twierdzenie, a wygląda zbyt prosto nie budzi zainteresowania matematyków.

**Ale Autor nie ustawał w wysiłkach i po kilkunastu latach (sic) udało mu się w roku 2018 zauważyć że od iloczynu lepszym miernikiem jest jednak suma. Wynika to stąd iż iloczyn byłby właściwszy, gdyby trzeba było zmierzyć sprawność zespołu dwóch graczy współdziałających ze sobą w jednej drużynie, a przecież tu chodzi nie o współdziałanie lecz o walkę przeciwko sobie. Oczywiście justycjalizacja nie jest twierdzeniem, lecz postulatem i być może dlatego została już wcześniej zignorowana przez 2 czasopisma matematyczne. Coprawda Zasada Najmniejszych Kwadratów też jest postulatem, ale o dziwo nikt z tego powodu nie podnosi larum, lecz jest powszechnie stosowana. Różnych turniejów jest w świecie zatrzęsienie.
Warto więc zastanowić się czy aby zakorzeniona metody punktowania przez zwykłe sumowanie jest naprawdę najwłaściwsza. Uważam że nie.**

Źródło: Pikier.com

Zasada Indukcji Początkowej (2008)

Niech T(n) oznacza tezę o liczbie n.
Dla każdej T istnieje takie k że:
JEŚLI dla każdego i < k jest T(i)
TO dla każdego n jest T(n)

Wszystkie liczby użyte obok z lewej są naturalne

To twierdzenie wynikło z próby zastanowienia się czy z faktu, że jeśli coś dowiedziemy dla bardzo wielu kolejnych liczb naturalnych, to jednak coś będzie z tego wynikać. Pomysł jak na matematykę dość zwariowany, jako że z dawien dawna takie przypuszczenie uznaje się za nonsensowne.
Ale faktycznie – okazało się że jeśli coś zachodzi dla dostatecznie wielu kolejnych liczb naturalnych, to zachodzi także dla wszystkich. Dowód jest łatwy – może służyć jako ćwiczenie z logiki – niestety nie daje żadnych możliwości wyznaczenia owego „dostatecznie wiele” – twierdzenie jest zatem tylko zaskakująca ciekawostką.

Podanie tej ciekawostki na pewnym forum spowodowało istny wylew drwin na Autora, że jakoby popisuje się, że to dziecinne i oczywiste, że to żadna odkrycie itp itd. Ten zadziwiający atak wynikł prawdopodobnie z... zazdrości tych co nawet takiego drobiazgu do matematyki nie wnieśli, ograniczając się do rozwiązywania stereotypowych, znanych i wyćwiczonych problemów.
Znalazł się jednak człowiek który nie wziął udziału w kpinach, lecz zauważył że poprzednik implikacji można zastąpić po prostu przez T(k). Teraz staje się to jeszcze bardziej szokujące, bo wystarczy dowieść tezy dla jednej wartości (!!) byleby – bagatelka, LOL – wiedzieć ile ona wynosi. Tak to jest z dowodami niekonstruktywnymi – i dlatego przez tzw matematyków–intuicjonistów są kwestionowane jako niedoskonałe.

Okazało się w końcu (2018) że twierdzenia pasujące do powyższego schematu były już dawno temu dostrzeżone (https://www.bu.edu/wcp/Papers/Logi/LogiZenk.htm), że artykuł im poświęcony ukazał sie w biuletynie Wacława Sierpińskiego – jednym słowem kpiarze ostatecznie się skompromitowali.

Hipoteza Maxymalnego Splotu (1972)

JEŚLI:
jest ileś tam funkcyj przekształcających pierścień reszt modulo R na siebie, i zarówno one jak ich różnice są różnowartościowe
TO:
jest ich najwyżej tyle ile wynosi najmniejszy dzielnik właściwy liczby R zmniejszony o 1

Jak dokonałem wynalazku

Felieton opublikowany około 1999

W 1972 roku pracowałem w Ośrodku Obliczeniowym przy Ministerstwie Handlu Wewnętrznego, w Dziale Programowania. Ośrodek ten (zwyczajem PRL–owskim) nic sensownego nie robił, prócz tego że zapewniał miłą i lekką pracę (rzecz jasna kiepsko płatną) inteligentnej młodzieży (w Dziale Programowania) i inteligentnym średniowiekowcom (w Dziale Projektowania). Był więc podczas pracy czas i na zabawę i na zajęcia własne. Byle wysiedzieć te 8 godzin.

Zetknąłem się wówczas po raz pierwszy z tzw Kodem Kontrolnym.
Rzecz polega na tym, że wypisując jakąś nazwę możemy omyłkowo wpisać inną – bardzo podobną i też istniejącą. Np jeśli są nazwy Alfa153 i Alfa163, to zmiana 5 na 6 jest bardzo łatwa do przeoczenia. Nazwy powinny być więc zróżnicowane, a najłatwiej to osiągnąć rozszerzając je o dodatkowo cyfrę (Kod Kontrolny), wyliczaną z odpowiednio przyjętej formuły matematycznej.
W 1972 na komputer chodziło się raz na tydzień (z pudłem kart perforowanych), a ręczne obliczanie Cyfry Kontrolnej zabierało kilka nudnych i żmudnych minut. Wykombinowałem więc suwak składający się z kilku kartoników (położonych kolejno jeden na drugim), co skróciło obliczanie do kilku sekund i wyeliminowało konieczność sprawdzania.

Kiedy sława suwaka dotarła do Działu Projektowania, zjawiłem się tam z modelem w ręku, aby zostawić do skopiowania i swobodnego użytku. Ku mojemu zdumieniu Kierownik Działu nie chciał suwaka nawet wziąć do ręki, by – jak stwierdził – nie ukraść mi mimowolnie pomysłu. Okazało się, że mam suwak opatentować, że dostanę za to pieniądze, że mam obliczyć ile zyska gospodarka narodowa,... itd itp.

Zaraziłem się tym zapałem i...
Rzecznik Patentowy Ministerstwa dał mi do zrozumienia, że ma mnie gdzieś (razem z suwakiem), i żebym nie przeszkadzał mu w pracy. W Biurze Patentowym PRL popatrzono na mnie jak na złodzieja (!?). Zrezygnowałem.

Po kilku miesiącach odszedłem z Ośrodka, a w miesiąc później usłyszałem, że powołano tam Zespół do Oceny Wynalazków Pracowniczych. Czy cokolwiek oceniono? – nie wiem do dzisiaj [*pisane w 1994*]. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, abyś Ty Czytelniku się dowiedział. Ośrodek bowiem zdaje się nadal istnieje pod nazwą:

C E N T R U M K O M P U T E R Y Z A C J I R Y N K U

P.S.
Hipotezę Maxymalnego Splotu wysunąłem właśnie w związku z suwakiem.
Nie potrafiłem jej rozstrzygnąć. Poszedłem z nią do Katedry Teorii Liczb (gdzie też nie potrafiono). Możliwe więc, że jakaś postać „Hipotezy Sławińskiego” do dziś figuruje gdzieśtam w literaturze matematycznej.
I na zakończenie anegdota związana z Hipotezą:

Męczyłem nią oczywiście wszystkich znajomych mających coś wspólnego z matematyką. Jeden z nich spotkał ongiś w pociągu nocnym z Paryża Anglika jadącego do Warszawy na Kongres Matematyków, akurat specjalistę od Teorii Liczb. Oczywiście przedstawił mu hipotezę, a Anglik z pobłażliwym uśmiechem stwierdził, że może (mój znajomy) spokojnie zasnąć, bo wkrótce zostanie to rozstrzygnięte. Ale nad ranem Anglik nadal siedział z piórem w ręku, a zamiast pobłażliwego uśmiechu na jego twarzy widniał zdumiony respekt. I nic dziwnego: bo przypadkowy młody (wówczas) człowiek, w niedbałym stroju podróżnym wprawia jego (specjalistę od Teorii Liczb!) w zakłopotanie.

Mediana do (drobnej) korekty (2017)

Wiadomo że funkcja $S(x) = |x - x_1|^p + |x - x^2|^p + \ldots + |x - x_n|^p$

dla $p = 2$ **osiąga minimum dla średniej arytmetycznej, a dla** $p = 1$ **dla mediany. Dla** $p = 1$ **zdarzają się jednak sytuacje kłopotliwe – mianowicie minimum może być przyjmowane na całym przedziale. Np dla zestawu 1 2 5 8 minimum = 10 jest przyjmowane na całym przedziale [2,5].**

Ten kłopot rozwiązuje się pragmatycznie, biorąc za medianę środek przedziału. Nasuwa się pytanie, czy jest to jakoś uzasadnione?
Zbadałem empirycznie (analitycznie chyba niesposób) jak zmienia się minimum gdy p **dąży do** $1+$**? Okazało się że minimum nie dąży do środka przedziału!**
Np dla zestawu 1 2 5 8 – jeśli $p \to 1+$ **minimum dąży do** $3{,}8$
Zatem ta granica powinna być przyjmowana za medianę, lecz niestety – obliczenie jej jest b.żmudne, więc zwyciężyła wygoda.

Aksjomat Wzrastania Prawdopodobieństwa (2017)

To co się zdarzyło miało w ostatniej chwili największą szansę zaistnienia

Wniosek:

Jeśli ze zbioru zdarzeń wcześniej jednakowo prawdopodobnych jakieś się przytrafiło, to musiało ono stać się najbardziej prawdopodobne.

Ilustracja:

Jeśli rzucamy np dwiema monetami, to przed rzutem prawdopodobieństwo dwóch orłow wynosi 25% – ale jeśli już wypadły dwa orły, to prawdopodobieństwo musiało wzrosnąć do 1. Nie ma znaczenia że tego nie widzimy, bowiem moglibyśmy zobaczyć po sfilmowaniu i obejrzeniu w zwolnionym tempie.

Wniosek metafizyczny:

Bóg to istota dla której prawdopodobieństwa są 0 lub 1.
Jego logika jest więc klasyczna – zero-jedynkowa.
Człowiek jako istota niedoskonała musiał z rozpaczy wprowadzić prawdopodobieństwo oraz logikę trójwartościową i inne.

Poglądowy dowód Hipotezy Legendre'a (2017)

<u>Hipoteza Legendre'a (1805)</u>:
Jeśli wykonano szereg pomiarów pewnej wielkości, to najbardziej prawdopodobną jej wartością jest taka której suma kwadratów odchyleń jest najmniejsza.

Pomiary: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Suma: $S(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$

Skąd łatwo wyliczyć że ową wartością jest zwykła średnia arytmetyczna (zapewne znana i stosowana od zarania dziejów).

W Wikipedii czytamy:
Hipoteza Legendre'a nie wynika z żadnej ścisłej matematycznej teorii. Jakkolwiek poczyniono wiele prób, by udowodnić jej słuszność i uzasadnić stosowanie, wszystko spełzło na niczym.
I faktycznie – nie udaje się znaleźć w necie żadnego dowodu.
Ścisłego dowodu przeprowadzić nie potrafię – ale udało mi się trafić na obiecującą ścieżkę...

Przytrafiło się nam zdarzenie będące iloczynem zdarzeń niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, więc jego szansa = iloczynowi szans tych zdarzeń.
Skoro się przytrafiło, to – patrz Aksjomat Wzrastania Prawdopodobieństwa – jego prawdopodobieństwo musiało stać się największe z prawdopodobieństw zdarzeń tej samej kategorii, czy z zestawów n pomiarów.
Aby coś z tego wywnioskować, musimy to prawdopodobieństwo obliczyć.

Załóżmy że próbka podlega królującemu rozkładowi normalnemu.
Jest to rozsądne ułatwienie – ale wyliczenie będzie niemal niemożliwe, bo mamy nie przedziały, lecz liczby. Dokonajmy więc uproszczenia:
Zastąpmy rozkład normalny jego przybliżeniem w postaci rozkładu dwumianowego, czyli przyjmijmy że prawdopodobieństwa zdarzeń $0, 1, \ldots, k$ są proporcjonalne do współczynników w rozwinięciu potęgi $(a+b)^k$.
Otrzymamy ciąg liczb będący podstawą Trójkąta Pascala (porównaj także z Deską Galtona) przy czym najbardziej prawdopodobne będzie zdarzenie środkowe o wartości równej połowie k.

Oto ilustracja dla $k = 16$:

1 16 120 560 1820 4368 8008 11430 <u>12850</u> 11430 8008 4368 1820 560 120 16 1

Teraz ulokujmy pod tym tym próbkę, dajmy na to $1\ 2\ 5\ 8$ – oczywiście tak aby zachować odstępy między liczbami próbki, czyli na przykład tak:

1	16	120	560	1820	4368	8008	11430	<u>12850</u>	11430	8008	4368	1820	560	120	16	1
					1	2			5			8				

Iloczyn liczb nad wartościami z próbki odzwieciedla prawdopodobieństwo, że próbka pochodzi z tego rozkładu. Łatwo sprawdzić że jest ono największe kiedy średnia arytmetyczna próbki (tutaj 4) ulokowania jest pod maximum rozkładu dwumianowego = 12850. Wszelkie przesunięcie próbki (z zachowaniem odstępów, rzecz jasna) da prawdopodobieństwo mniejsze.

Taki jest ten dowód – poglądowy i z uproszczeniami. Może ktoś go uściśli?

Dodajmy jeszcze kilka słów wyjaśnienia na temat roli jaką pełni w tym Aksjomat Wzrastania Prawdopodobieństwa...

Wartość najbardziej prawdopodobna to ta dla której rozkład osiąga maxymalne prawdopodobieństwo.
Faktem jest że dla danej próbki takim rozkładem jest ten w którym średnia rozkładu = średnia próbki, ale nie wynika stąd że próbka pochodzi właśnie z tego rozkładu!
Dopiero zaakceptowanie Aksjomatu uprawnia do takiego wniosku!!!
A brzmi on w lapidarnym skrócie tak:
„To co się zdarzyło miało w ostatniej chwili największą szansę zaistnienia"
i na jego słuszność wskazuje fizyka.

A w ogóle to Autor zajmuje się bardziej teorią brydża niż matematyką, o czym można się przekonać pod www.Pikier.com (nb tam też jest trochę matematyki).